

CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIERIE

Option Mathématiques

Mercredi 17 Avril 2002

Durée : 1 Heure 30

EPREUVE OPTIONNELLE de MATHEMATIQUES

L'objet du problème est l'étude du nombre u_n de façons de calculer, c'est à dire de parenthèser, une expression de la forme $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent n éléments ($n \in \mathbf{N}$) d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne a priori non associative notée *.

Notons qu'on ne sait calculer à la fois que le composé de *deux* éléments, et seuls sont donc pris en compte les parenthèsages ramenant le calcul d'une expression de la forme $x_1 * x_2 * \ldots * x_n$ au calcul successif de composés de deux éléments ; par exemple, si $n = 4$, $(x_1 * x_2) * (x_3 * x_4)$ ou encore $((x_1 * x_2) * x_3) * x_4$ sont des parenthèsages corrects, mais pas $(x_1 * x_2 * x_3) * x_4$ puisqu'il n'indique pas comment calculer $x_1 * x_2 * x_3$.

On posera $u_0 = 0$, et on a $u_1 = u_2 = 1$, tandis que $u_3 = 2$ puisqu'on peut calculer $x_1 * x_2 * x_3$ d'une part comme $(x_1 * x_2) * x_3$, d'autre part comme $x_1 * (x_2 * x_3)$.

1°) Etude de deux cas particuliers

Déterminer les deux nombres u_4 et u_5 en explicitant les différentes façons possibles de calculer, c'est à dire de parenthèser, les expressions $x_1 * x_2 * x_3 * x_4$ et $x_1 * x_2 * x_3 * x_4 * x_5$.

2°) Relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n)

a) Justifier pour tout nombre entier *supérieur ou égal à 2* la relation (R) :

$$u_n = u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \ldots + u_{n-2} u_2 + u_{n-1} u_1.$$

b) Ecrire un algorithme de calcul de u_n lorsque le nombre entier naturel $n \geq 2$ est donné.
Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles nécessaires au calcul de u_n ?

3°) Etude d'une équation différentielle auxiliaire

Dans cette question, on considère l'équation différentielle (E) :

$$(1 - 4x)y' + 2y = 1.$$

a) Déterminer l'unique solution f de (E) définie sur]–1/4, 1/4[et s'annulant en 0.

b) On suppose qu'il existe une série entière de terme général $x \to a_n x^n$, de rayon de convergence strictement positif R, dont la somme g s'annule en 0 et est solution de (E) sur $]-R, R[$. Préciser a_0 et expliciter a_n pour $n \geq 1$ en fonction de n et du coefficient binomial C_{2n}^n.

En déduire le rayon de convergence de la série entière de terme général $x \to a_n x^n$.

c) Etablir à l'aide d'un théorème dont on citera l'énoncé que la somme g de la série entière précédente est égale à f sur]–1/4, 1/4[.

4°) Détermination de la suite (u_n)

a) Prouver la relation $f^2(x) - f(x) + x = 0$ sur l'intervalle]–1/4, 1/4[.

En déduire, pour tout nombre entier *supérieur ou égal à 2*, la relation suivante :

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_{n-2} a_2 + a_{n-1} a_1.$$

b) En déduire, à l'aide des résultats obtenus, l'expression de u_n en fonction de n.